Några uppgifter om ekvationer på formen $z^n = w$

1. Låt $z = 2 \cdot (\cos(40°) + i \cdot \sin(40°))$

a) Bestäm z^4 på *polär form*

b) Bestäm z^4 på *formen* $a + bi$

2. Hitta ***en*** lösning till ekvationen $z^3 = (8, 60°)$

3. Lös ekvationen $z^6 = (20, 120°)$ genom att utgå från följande deluppgifter,

I) Skriv z som ett allmänt komplext tal på polär form.

II) Utför upphöjningen med hjälp av de Moivres formel

III) Jämför avstånd och vinkel mellan höger och vänsterleden,
och ställ upp en ekvation för respektive.

IV) Lös de båda ekvationerna i c) för att hitta ekvationens första lösning.

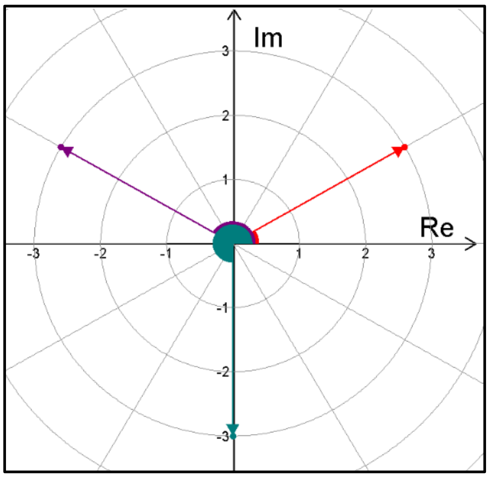
V) Beräkna vinkeln mellan två lösningar, α, genom att ta $\alpha = 360°/exponenten$

VI) Ställ upp alla 6 lösningar genom att utgå från första lösningen och lägga till
ett α för varje lösning.

4. Hitta **alla** lösningar till ekvationen $z^4 = (81, 80°)$.

5. Figuren nedan visar alla lösningar till ekvationen $z^n = w$

Använd figuren till att hitta talen n och w

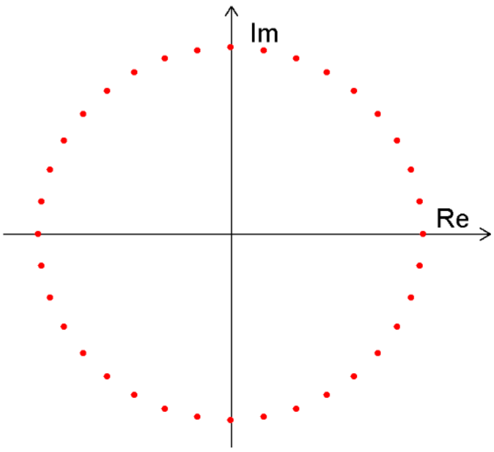


6. En lösning till ekvationen $z^9 = w$ är $z = 2{,}2 \cdot (\cos(64°) + i \cdot \sin(64°))$
Ange en valfri annan lösning till ekvationen.

7. Hitta alla lösningar till ekvationen $z^5 = 32i$.

8. Figuren nedan visar 36 punkter jämnt fördelade i en cirkel med radien $\sqrt[12]{20}$ i ett komplext talplan.

a) Bland punkterna finns samtliga lösningar till ekvationen $z^6 = w$ där $arg(w) = 240°$
Markera dessa punkter.



b) Bestäm talet w

9. Hitta alla lösningar till ekvationen $z^3 = 4 + 4i$.
Svara exakt på polär form!

10. Lös uppgiften nedan

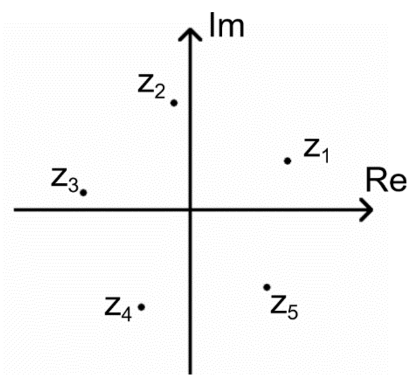
Figuren visar lösningarna till ekvationen

$z^n = w$

där

$z_2 = 3\cdot(\cos(100°) + i\sin(100°))$

Bestäm z_5 på polär form



FACIT - Några uppgifter om ekvationer på formen $z^n = w$

1. Låt $z = 2 \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))$

a) $z^4 = (16, 120°)$

b) $z^4 = 16 \cdot (\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)) = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8\sqrt{3}i$

2. Ett tal som efter upphöjning med 3 blir $(8, 60°)$ är $z = \left(\sqrt[3]{8}, 60°/3\right) = (2, 20°)$

3. I) $z = (r, v)$

II) $z^6 = (r^6, 6v)$

III) $(r^6, 6v) = (20, 120°)$

Avståndet lika: $r^6 = 20$
Vinkeln lika: $6v = 120°$

IV) $r^6 = 20$ ger att $r = \sqrt[6]{20}$
$6v = 120°$ ger att $v = 20°$
Första lösningen är således $z_1 = (\sqrt[6]{20}, 20°)$

V) Exponenten var här 6 → $\alpha = 360°/6 = 60°$

VI) Alla lösningar har samma avstånd, men vinkeln ökar med $\alpha = 60°$

$z_1 = (\sqrt[6]{20}, 20°)$

$z_2 = (\sqrt[6]{20}, 80°)$

$z_3 = (\sqrt[6]{20}, 140°)$

$z_4 = (\sqrt[6]{20}, 200°)$

$z_5 = (\sqrt[6]{20}, 260°)$

$z_6 = (\sqrt[6]{20}, 320°)$

4. Den första lösningen: $z_1 = (3, 20°)$.
Mellan två lösningar: $\alpha = 360°/4 = 90°$
$z_2 = (3, 110°)$
$z_3 = (3, 200°)$
$z_4 = (3, 290°)$.

5. Det är tre lösningar, vilket innebär att $n = 3$
För att bestämma högerledet, utgå från valfri lösning och höj upp den med 3.

Ex: $z_1 = (3, 30°)$ som leder till att ${z_1}^3 = (27, 90°) = 27i$
(det blir samma svar för alla lösningar (alla löser ju samma ekvation))

$w = 27i$

6. Eftersom exponenten är 9 gäller att vinkeln mellan är $\alpha = 360°/9 = 40°$
Med andra ord, alla lösningar har samma avstånd, men vinkeln skiljer med 40°
Andra lösningar skulle kunna t.ex kunna vara $z = (2{,}2\,; 104°)$ eller $z = (2{,}2\,; 24°)$

7. Börja med att skriva om högerledet till polär form,

$32i = (32, 90°)$

Första lösningen blir: $z_1 = (\sqrt[5]{32}, 90°/5) = (2, 16°)$

Mellan två lösningar blir vinkeln: $\alpha = 360°/5 = 72°$

Alla lösningar är därför:

$z_1 = (2, 16°)$

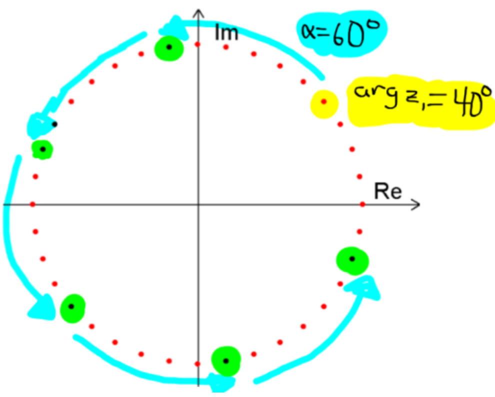
$z_2 = (2, 88°)$

$z_3 = (2, 160°)$

$z_4 = (2, 232°)$

$z_5 = (2, 304°)$

8. a) Det är $10°$ mellan varje punkt.
Vinkeln hos högerledet är $240°$, och exponenten är 6 vilket leder till att första lösningen har vinkeln $240°/6 = 40°$
Mellan två lösningar ska det vara $\alpha = 360°/6 = 60°$



b) Vinkeln hos w är given i uppgiften, $arg(w) = 240°$
Varje lösning med exponenten 6 har avståndet $\sqrt[12]{20}$.
Då måste w ha avståndet $\left(\sqrt[12]{20}\right)^6 = \sqrt{20}$

$w = (\sqrt{20}, 240°)$

9. Skriv högerledet på polär form $4 + 4i = (\sqrt{32}, 45°)$
Första lösningen är $z_1 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{32}}, 15°\right)$
Mellan två lösningar gäller $\alpha = 360°/3 = 120°$
$z_2 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{32}}, 135°\right)$, $z_3 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{32}}, 255°\right)$

10. $\alpha = 360°/5 = 72°$. z_5 har samma avstånd som z_2 och en vinkel 3 steg längre fram:
$z_5 = (3, arg(z_2) + 3 \cdot 72°) = (3, 100° + 216°) = (3, 316°)$